Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Vektorräume, Untervektorräume und Matrizen

Aufgabe 1. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P)

Berechnen Sie jeweils falls möglich die Matrizen $A \cdot B$ und $B \cdot A$:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Es seien natürliche Zahlen $n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$, $C \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$ und $D \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$ gegben, sowie reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$. Wie müssen Sie $n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ wählen, damit Sie die Matrix

$$A \cdot (r \cdot B + C) \cdot (s \cdot D)$$

bilden können?

Aufgabe 2. ((Gruppe) 1P+1P+1P+1P)

Zeigen Sie für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B, C \in \mathbb{R}^{m \times k}$ folgende Rechenregeln:

(i) Es gilt: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(ii) Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $A \cdot (r \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B)$.

(iii) Es gilt: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(iv) Für die Einheitsmatrix $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt: $A \cdot I_m = A$ und $I_m \cdot B = B$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 2P+2P)

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $0_V = (0,0)^t \in V$ und $+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die übliche Vektoraddition auf $V = \mathbb{R}^2$. Es sei weiter eine skalare Multiplikaiton $\odot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\alpha \odot (x, y) := (\alpha x, 0)$$

Prüfen Sie welche Axiome von Definition II.2.1. für $(V, +, \odot, 0_V)$ erfüllt sind.

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^2$, $0_V = (0,0)^t \in V$ und $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die übliche Skalarmultiplikation auf $V = \mathbb{R}^2$. Es sei weiter eine Addition $\oplus\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 - y_2).$$

Prüfen Sie welche Axiome von Definition II.2.1. für $(V, \oplus, \cdot, 0_V)$ erfüllt sind.

Aufgabe 4. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P)

Im Folgenden ist $(V, +, \cdot, 0_V)$ jeweils ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Entscheiden Sie jeweils, ob U Untervektorraum von V ist (wie immer mit Beweis).

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, sowie

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei $V = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, sowie

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\}.$$

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation, sowie

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\}.$$

(iv) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit der Addition, Skalarmultiplikation und dem Nullvektor wie in Beispiel II.2.2(ii) und $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(2\pi + x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 11. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.